

## **PROJECT TITLE :**

Metodi variazionali ed ottimizzazione numerica per la decomposizione di segnali ed immagini.

Variational approaches and numerical optimization to signal and image decomposition

## **Project Goals:**

(versione in inglese)

The project is devoted to the ill-posed, inverse problem of the decomposition of a observed noisy data (signal/image) into piecewise constant, piecewise-smooth, textured and noise components. In order to solve this inverse problem one of the most well-known techniques is by energy minimization and regularization. The objective is to obtain a regularized variational model which is parameter free and both context- and noise- unaware. One challenge in data decomposition is the ability to separate noise from texture in observed data.

The project involves one preliminary study and two main steps, followed by experimental validation. The preliminary study concerns the functional spaces characterizing the different data components. In the first phase, the goal is to design a variational formulation to denoise data perturbed by a generic white additive noise. In the second phase the goal is to define a variational model able to split the denoised data into texture and structured parts. The key aspects of the two variational models are represented by the whiteness (auto-correlation) and cross-correlation principles. Then the project will analyze suitable numerical solutions for the two optimization problems which present critical issues related both to the cost functions, which are non-convex and non-smooth, and to the large dimension of the data.

The mathematical techniques will be validated on real data in the context of a collaboration with INAF (National Institute of Astrophysics), on CSES Earth electric field data.

(versione in italiano)

Il progetto è dedicato al problema inverso mal posto della decomposizione di un dato rumoroso osservato (segnale / immagine) in componenti a tratti costanti, lisci a pezzi, tessiture e rumore. Per risolvere questo problema inverso una delle tecniche più conosciute è la minimizzazione e la regolarizzazione dell'energia. L'obiettivo è quello di ottenere un modello variazionale regolarizzato che sia

privo di parametri e sia robusto al rumore. Una sfida nella decomposizione dei dati è la capacità di separare il rumore dalla trama nei dati osservati.

Il progetto prevede uno studio preliminare e due fasi principali, seguite dalla convalida sperimentale. Lo studio preliminare riguarda gli spazi funzionali che caratterizzano le diverse componenti dei dati. Nella prima fase, l'obiettivo è quello di progettare una formulazione variazionale per rimuovere il rumore da dati perturbati considerando un generico rumore additivo bianco. Nella seconda fase l'obiettivo è quello di definire un modello variazionale in grado di suddividere i dati senza rumore in tessitura e parti strutturate. Gli aspetti chiave dei due modelli variazionali sono rappresentati dai principi di bianchezza (auto-correlazione) e cross-correlazione. Successivamente il progetto analizzerà soluzioni numeriche idonee per i due problemi di ottimizzazione che presentano criticità legate sia alle funzioni di costo, non convesse e non lisce, sia alla grande dimensione dei dati.

Le tecniche matematiche saranno valide su dati reali nell'ambito di una collaborazione con l'INAF (Istituto Nazionale di Astrofisica), sui dati del campo elettrico terrestre CSES.

### **Program for the research activities:**

- Functional spaces for decomposition. In a minimization problem such as the data decomposition one, the study of the appropriate functional spaces for decomposing an image into a piecewise smooth (or cartoon) part and an oscillatory (or textured) part is fundamental and preliminar to the variational model design. The space of bounded variation has been considered for the structured parts. Y. Meyer also proposed other spaces for modeling oscillations, denoted by  $G$  space and  $E$  (generalized Besov space). Oscillatory patterns have smaller norms in  $G$ , and  $E$  than in  $L^2$ .
- Variational model design. Study of new variational models for data (signal/image) decomposition into three components, aimed at improving the two components decomposition on manifold and images and able to separate the texture component from the noise.
- Numerical Optimization. Study of innovative numerical techniques and associated theoretical properties; analysis of the conditions for “convex-non convex” (CNC) approach; it consists in determining theoretical conditions on the parameters of the non-convex penalty function, such

that the total cost functional, which contains non-convex terms, results to be overall convex.

- Validation of the models on data provided from INAF